26-10-20

• **Υποβιβασμός Τάξης.**

Θεωρούμε τη γραμμική δ.ε. δεύτερης τάξης: $y''+p_1y'+p_2y=q$, $t\in I$
Αν y_1 είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς γρ. δ.ε. δεύτερης τάξης: $y''+p_1y'+p_2y=0$, $t\in I$
με $y_1(t)\neq 0$, $t\in I$, τότε η αντικατάσταση $y=y_1u$ ανάγει την εξίσωση δεύτερης τάξης (Ε) σε μία γ.δ.ε. πρώτης τάξης.
Πράγματι, έχουμε:

$y''+p_1y'+p_2y=q$
$\Rightarrow (y_1u)''+p_1(y_1u)'+p_2(y_1u)=q$
$\Rightarrow y_1''u+2y_1'u'+y_1u''+p_1y_1'u+p_1y_1u'+p_2y_1u=q$
$\Rightarrow u[y_1''+p_1y_1'+p_2y_1]+2y_1'u'+y_1u''+p_1y_1u'=q$

απ' όπου, για $z=u'$ παίρνουμε:

$y_1u''+2y_1'u'+p_1y_1u'=q$
$\Rightarrow y_1z'+(2y_1'+p_1y_1)z=q$

και: $z'+\left(2\dfrac{y_1'}{y_1}+p_1\right)z=\dfrac{q}{y_1}$

$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$, $x\in(0,1)$, $y_1=x$.

• Η συνάρτηση $y_1=x$, $x\in(0,1)$ ικανοποιεί την εξίσωση.
• Για $y=uy_1$ παίρνουμε:

$0=(1-x^2)(2u'+xu'')-2x(u+xu')+2xu=$
$=(1-x^2)xu''+(1-x^2)2u'-2xu-2x^2u'+2xu.$
$0=(1-x^2)xu''+2(1-2x^2)u'$

και για $z=u'$:

$(1-x^2)xz'+2(1-2x^2)z=0$
$\Rightarrow z'+2\cdot\left(\dfrac{1-2x^2}{x(1-x^2)}\right)\cdot z=0$

Για τις λύσεις της τελευταίας εξίσωσης, έχουμε για $x \neq 0$, $x \in (0,1)$:

$$z(x) = C \cdot e^{-2\int \frac{1-2x^2}{x(1-x^2)}dx}, \text{ επομένως,}$$

$$u = \int z(x)dx = \int C e^{-2\int \frac{1-2x^2}{x(1-x^2)}dx} dx + C_1$$

και $y(x) = xu(x) = x \int z(x)dx = \int C e^{-2\int \frac{1-2x^2}{x(1-x^2)}dx} dx + C_1.$

• Για το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\frac{1-2x^2}{x(1-x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-x}$$

$\Rightarrow A=1,\ B=-1/2,\ C=1/2$

και $2 \cdot \frac{1-2x^2}{x(1-x^2)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$

Άσκηση: Να προσδιορισιεί το πεδίο ορισμού των λύσεων $y \neq x$.

• **Ύπαρξη και μονοσήμαντο λύσεων π.α.τ.:**

Το π.α.τ.: $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, $t \in I$

Μερικές θεμελιώδεις έννοιες:

• Η έννοια της ύπαρξης λύσης του π.α.τ.: πεδίο ορισμού
• Επέκταση λύσης - Επεκτάσιμη λύση.
• Μονοσήμαντο
• Μέγιστη (ελάχιστη) λύση.

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις}}$:

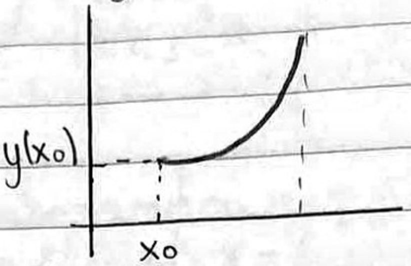
• Το π.α.τ. $y' + py = q$, $y(t_0) = y_0$, $t \in I$, $p, q \in C(I)$:
- $f(t,y) = -p(t)y - q(t)$, $t \in I$, $y \in \mathbb{R}$
- $f(t,y): I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- Ύπαρξη και μονοσήμαντο - πεδίο ορισμού λύσεων

- **Το π.α.τ. $y' = y^2$, $y(t_0) = y_0$**, $t, y \in \mathbb{R}$

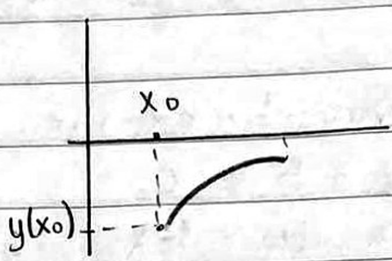
- $y(t_0) = 0$, $y = 0$, $t \in \mathbb{R}$

- $\int_{t_0}^{t} y^{-2}(s) y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} 1\, ds$



$\Rightarrow \int_{y(t_0)}^{y(t)} u^{-2}\, du = \int_{t_0}^{s} ds$

$\boxed{y' = y^2}$



$\Rightarrow -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(t_0)} = t - t_0$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y(t_0)} - (t - t_0)} \Rightarrow y(t) = \frac{y(t_0)}{1 - y(t_0)(t - t_0)}$, $t \in \mathbb{R} : 1 \neq y(t_0)(t - t_0)$

- $y(t_0) = 0$, $y = 0$, $t \in \mathbb{R}$

- **Το π.α.τ. $y' = y^{1/3}$, $y(t_0) = y_0$**, $t, y \in \mathbb{R}$

- $y(t_0) = 0$, $y = 0$, $t \in \mathbb{R}$

- $\int_{t_0}^{t} y^{-1/3}(s) y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} 1\, ds$

$\Rightarrow \int_{y(t_0)}^{y(t)} u^{-1/3}\, du = \int_{t_0}^{s} ds$

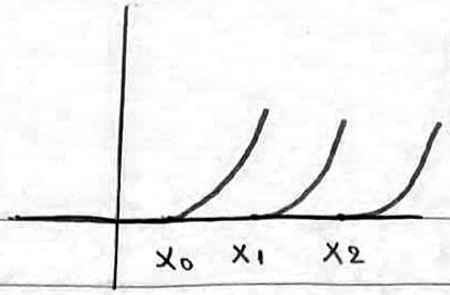
$\Rightarrow y^{2/3}(t) - y^{2/3}(t_0) = \frac{3}{2}(t - t_0) \Rightarrow y^{2/3}(t) = y^{2/3}(t_0) + \frac{3}{2}(t - t_0)$

$\Rightarrow y(t) = \left[\sqrt{y^{2/3}(t_0) + \frac{3}{2}(t - t_0)}\right]^3$, $t \in \mathbb{R}$

- $y(t_0) = y_0 \neq 0 \Rightarrow y(t) = \left[\sqrt{y^{2/3}(t_0) + \frac{3}{2}(t - t_0)}\right]^3$, $t : y_0^{2/3} + \frac{3}{2}(t - t_0) \geq 0$

- $y(t_0) = 0 \Rightarrow y(t) = \left[\sqrt{\frac{3}{2}(t - t_0)}\right]^3$, $t \geq t_0$

$$y(t)=\begin{cases} 0 & , t<t_0 \\ \left[\sqrt{\tfrac{3}{2}}(t-t_0)\right]^3 & , t\geq 0 \end{cases}$$



$\boxed{y'=y^{1/3}}$

→ Θεώρημα (1).

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Θεωρούμε το π.α.τ. : $y'(t)=f(t,y(t))$, $y(t_0)=y_0$
όπου $f: S\to \mathbb{R}$ συνεχής στον τόπο $S\subseteq \mathbb{R}^2$ και $(t_0,y_0)\in S$.
Ας είναι $a,b>0$: $R=\{(t,y): |t-t_0|\leq a , |y-y_0|\leq b\}\subseteq S$
Υποθέτουμε ότι η f πληροί την συνθήκη:
$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq K|y_1-y_2|$, $(t,y)\in R$.
για κάποια μη αρνητική πραγματική σταθερά K.
Τότε το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση y που ορίζεται στο διάστημα $I=[t_0-r, t_0+r]$ $\Rightarrow r=\min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$

όπου $M=\sup\{|f(t,y)|: (t,y)\in R\}$.
Επιπλέον, η λύση y είναι το όριο της ακολουθίας $(\phi_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ των διαδοχικών προσεγγίσεων: $\phi_0(t)=y_0, \dots, \phi_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\phi_n(s))\,ds$
και ισχύει: $|y(t)-\phi_n(t)|\leq \dfrac{M(Kr)^{n+1}}{K(n+1)!}\cdot e^{Kr}$, $t\in I$, $n\in\mathbb{N}$